Demostraciones por Reducción al Absurdo

Explicadas paso a paso

David Gozalo

¿Qué es la reducción al absurdo?

La **reducción al absurdo** es una forma de demostrar que algo es verdad usando una idea muy sencilla:

> *Supón que lo que quieres demostrar es falso, y mira si eso te lleva a una contradicción.*

Si al suponer lo contrario llegamos a algo imposible (un absurdo), entonces esa suposición era falsa, y lo que queríamos demostrar debe ser verdadero. Se usa mucho cuando demostrar la afirmación es complicado, pero demostrar lo contrario es "más fácil"(realmente lo fácil es llegara a una contradicción)

Es como decir:

- "Imagina que tengo razón en lo contrario"
- "Si eso fuera cierto, pasarían estas cosas..."
- "Pero eso no puede pasar"

Por tanto, la idea inicial era incorrecta y lo contrario debe ser cierto.

—

Cómo funciona la reducción al absurdo (en 4 pasos)

1. Queremos demostrar una afirmación.
2. Suponemos lo contrario de esa afirmación.
3. Usamos lógica y matemáticas normales.
4. Llegamos a una contradicción (algo imposible). Luego la afirmación inicial es verdadera.

Cuando eso ocurre, concluimos que la suposición era falsa y su contrario (la afirmación inicial) era cierta.

—

Ejemplo 1: No existe el mayor número

Queremos demostrar: no existe un número que sea mayor que todos los demás.

Paso 1: Suposición

Supongamos que sí existe el mayor número. Lo llamamos M.

Paso 2: Construcción

Podemos formar el número $M + 1$.

Paso 3: Contradicción

$M + 1$ es mayor que M, lo cual contradice que M era el mayor número. Esto es fácil de ver porque si restamos a ambos números M nos queda $M + 1 - M > M - M \Rightarrow 1 > 0$.

Conclusión

No existe el mayor número.
—

Ejemplo 2: $\sqrt{2}$ no es racional

Queremos demostrar: $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción.

Paso 1: Suposición

Supongamos que:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

con a y b enteros y la fracción simplificada. Es decir, a y b no comparten factores comunes.

Paso 2: Operaciones

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Paso 3: Consecuencias

a^2 es par, luego a es par. Entonces $a = 2k$.
Sustituyendo:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

Así, b también es par.

Paso 4: Contradicción

a y b son pares, luego comparten factores comunes (el 2 por ser pares) pero eso está en contradicción con la suposición inicial de que a y b no tenían factores comunes.

Conclusión

$\sqrt{2}$ es irracional.

—

Ejemplo 3: Un número no puede ser par e impar a la vez

Queremos demostrar: no existe un entero que sea par e impar.

Paso 1: Suposición

Supongamos que existe un número n que es par e impar.

Paso 2: Definiciones

Si es par:

$$n = 2k$$

Si es impar:

$$n = 2m + 1$$

Paso 3: Contradicción

$$2k = 2m + 1 \Rightarrow 2(k - m) = 1$$

El lado izquierdo es par y el derecho impar. Imposible.

Conclusión

No existe un número par e impar a la vez.

—

Ejemplo 4: Existen infinitos números primos

Queremos demostrar: los números primos no se acaban.

Paso 1: Suposición

Supongamos que existen solo una cantidad finita de números primos. Una cantidad n:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

Paso 2: Construcción

Definimos:

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

Paso 3: Contradicción

Al dividir N entre cualquier primo de la lista, el resto es 1, por como ha sido construido. Luego:

- o bien N es primo nuevo,
- o tiene un divisor primo no listado.

Ambos casos contradicen la suposición inicial porque en el primer caso habríamos descubierto un nuevo primo que no estaba entre los n iniciales y en el segundo ocurriría lo mismo (uno o varios nuevos divisores primos que no habíamos considerado entre los n originales).

Conclusión

Existen infinitos números primos.
—

Ejemplo 5: Si n^2 es par, entonces n es par

Queremos demostrar: si n^2 es par, entonces n es par.

Paso 1: Suposición

Supongamos que n^2 es par pero n es impar.

Paso 2: Escribir un impar

Cualquier impar puede escribirse de la forma $2k+1$ ya que para diferentes valores de $k = 0, 1, 2 \ldots$ obtenemos $1, 3, 5 \ldots$

$$n = 2k + 1$$

Paso 3: Elevar al cuadrado

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Paso 4: Observación

Sacamos factor común el 2 de $4k^2 + 4k$ y nos queda:

$$4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Sin más que llamar j a $4k^2 + 4k$ tenemos $2(2k^2 + 2k) + 1 = 2j + 1$. Esto es impar.

Paso 5: Contradicción

Hemos supuesto que n^2 era par, pero resulta impar.

Conclusión

Si n^2 es par, entonces n es par.

Nota: si n^2 es par, entonces n es par puede demostrarse directamente sin recurrir a reducción al absurdo, sin más que:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2j$$

No obstante el objetivo del presente documento era mostrar usos del método de reducción al absurdo.

Conclusión final

La reducción al absurdo es una de las herramientas más poderosas de las matemáticas:

- no necesita cálculos complicados,
- solo lógica clara,
- y una buena contradicción.